ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN — POLONIA
VOL. VI, 7 SECTIO H 1972

Instytut Ekonomii Politycznej i Planowania
Wydział Ekonomiczny UMCS

Mikołaj ZINCZUK

Próba wykorzystania dynamicznego modelu funkcji produkcji w planowaniu plonów na przykładzie woj. lubelskiego

Попытка использования динамической модели функции производства в планировании урожаев на примере Люблинского воеводства

An Attempt to Utilize the Dynamic Model of the Function of Production in Planning Crops, Taking the Lublin Province as an Example

I

Przy określaniu dynamicznego modelu statystycznej funkcji produkcji przyjmujemy, że plon jest wypadkową n zmiennych niezależnych tzw. objaśniających

$$Y_t = F_t(X_1, ..., X_n) \quad (1$$

Nie zawsze jesteśmy w stanie uwzględnić w równaniu (1) wszystkie zmienne niezależne określające poziom plonów. Przy doborze czynników (traktowanych ze statystycznego punktu widzenia jako zmienne objaśniające) kierowano się głównie następującymi przesłankami: po pierwsze — przyjęto zasadę, że zmienne objaśniające powinny niezależnie wpływać na wyróżnioną zmienną zależną; po drugie — wyróżnione zmienne powinny być mierzalne lub tego typu, aby można je było sprowadzić do postaci mierzalnej; po trzecie — przyjęto zasadę, aby wyróżniać tylko te zmienne, które mają statystycznie istotny wpływ na zmienną zależną; po czwarte — aby istniała możliwość wprowadzenia do dynamicznego modelu statystycznej funkcji produkcji dostępnych, reprezentatywnych i wiarygodnych informacji statystycznych.

W dalszych naszych rozważaniach będziemy przyjmowali, że na wielkość plonów ma wpływ k istotnych czynników, a n-k czynników nie

uwzględnionych w funkcji produkcji ma charakter przypadkowy co zapisujemy

$$Y = F_t(X_1,...,X_k) + \xi_t \tag{2}$$

gdzie X_1, ..., X_k są czynnikami określającymi poziom plonów inaczej zwanymi zmiennymi niezależnymi lub objaśniającymi, a ξ_t jest składnikiem losowym składającym się z szeregu czynników pominiętych i wywierających niewielki wpływ na funkcję produkcji.

Najczęściej spotykanymi postaciami dynamicznej funkcji produkcji jest funkcja Cobb-Douglasa o stałych elastycznościach cząstkowych lub funkcja prostoliniowa. Ze względów czysto rachunkowych związanych z szacowaniem parametrów funkcji produkcji ograniczamy się tylko do następujących funkcji:

$$Y_t = 10^{\log a_0} \prod_{i=1}^{k} X_{it}^{a_i} \cdot e^{a_{k+1} \cdot \lambda t} \cdot e^{\xi t} \tag{3}$$

$$Y_i = a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot X_{it} + a_{k+1} \cdot \lambda(t) + \xi_t \tag{4}$$

gdzie:

Y_t — poziom plonów w okresie t obliczony z funkcji produkcji
X_{it} — zmienne objaśniające kształtowanie się plonów
$\lambda(t)$ — trend czasowy
$a_0, a_1, \ldots, a_k a_{k+1}$ — parametry, które szacuje się za pomocą metody najmniejszych kwadratów
ξ_t — składnik losowy

Warto zauważyć, że parametr λ mierzy średnią zmianę wielkości produkcji na odcinku czasu (t_1, t_n) i jest w naszym przypadku miernikiem poziomu kultury rolnej. Prościej formułując można powiedzieć, że parametr λ jest miernikiem efektu postępu agrotechnicznego na odcinku czasu od t_1 do t_n.

Jeśli $\lambda > 0$, to istnieje dodatni wpływ postępu agrotechnicznego, zajście zaś nierówności przeciwnej, tzn. $\lambda < 0$, oznacza ujemny wpływ tego postępu.

Wartości parametrów a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1} są w równaniach (3) i (4) niezmienne. Można je oszacować metodą najmniejszych kwadratów w oparciu o posiadaną próbę statystyczną. Po wyliczeniu wszystkich parametrów funkcja produkcji może informować nas o ilościowych zależnościach między zmienną zależną Y_t, a zmiennymi objaśniającymi lub na jej podstawie możemy dokonywać prognoz wartości Y_t, jeśli założymy, że podane są określone wartości zmiennych zależnych w okresie, na który sporządzamy prognozę.

Zajmiemy się teraz bliżej składnikiem losowym ξ_t. Jeśli spełnione są następujące założenia: 1) zmienna losowa ξ_t ma nadzieję matematyczną zero i stałą wariancję $\sigma\xi^2$ dla wszystkich wartości zmiennej czasowej *t;* 2) zmienne X_{it} są wielkościami nielosowymi; 3) obserwacje są niezależne; to estymatory parametrów a_i otrzymane metodą najmniejszych kwadratów są najefektywniejsze, zgodne i nieobciążone.

Wiadomo, że wartości ξ_t w przyszłych okresach czasu przy prognozie nie możemy dokładnie przewidzieć. Zauważmy przy tym, że pewne wyobrażenie o wielkości ξ_t daje znajomość parametru $\sigma\xi_t^2$, który można łatwo oszacować na podstawie odpowiedniego materiału statystycznego. Funkcja produkcji nadaje się do prognozy, jeśli *a priori* założymy, że w przyszłości nie ulegną istotnej zmianie wcześniej oszacowane parametry a_i.

II

Podstawą naszych rozważań stanowią dane liczbowe dotyczące całkowitej gospodarki rolnej woj. lubelskiego za lata 1957—1968.[1] Dane liczbowe dotyczą plonów 4 zbóż, nawożenia mineralnego i organicznego. Zostały zaczerpnięte z *Roczników statystycznych* za lata 1957—1969. Rozważaniami nie objęto szeregu innych ważnych czynników wpływających na poziom plonów (jakość gleby, dobór odmian, uprawa, warunki klimatyczne, melioracja) i inne, które są trudne do skwantyfikowania i przedstawienia w formie mierzalnej. Do badania przyjęliśmy dane za 12 lat. Jest to okres z punktu widzenia statystycznego dostatecznie duży do wyciągnięcia wniosków przy przewidywaniu plonów czterech zbóż na lata przyszłe. Analizę dynamiki plonów 4 zbóż łącznie rozpatrzono w zależności od nawożenia mineralnego i organicznego.

Bilans obornika został opracowany na podstawie szacunku danych GUS o stanie inwentarza żywego w woj. lubelskim w interesującym nas czasookresie.

Przyjęto następujące normy rocznej wydajności obornika od jednej sztuki statystycznej[2]: bydło — 75 q, konie — 55 q, trzoda chlewna — 12 q, owce 0,8 q.

---

[1] Dane dotyczą gospodarki bez podziału na gospodarstwa indywidualne, spółdzielcze i państwowe. W pracy wykorzystano w szerokim zakresie metodykę A. Zeliasia do warunków województwa lubelskiego. A. Zeliaś: *Zastosowanie dynamicznego modelu statystycznej funkcji produkcji w planowaniu wysokości plonów*, „Przegląd Statystyczny" 1968, z. 1, t. 15, s. 75—87.

[2] Przy ustalaniu bilansu obornika wykorzystano normy obliczone przez S. Wacławowicza (*Metodyka określenia stanu i kierunku rozwoju produkcji podstawowych zbóż na przykładzie województwa krakowskiego*, PWN, Kraków 1960, s. 72).

Tak uzyskaną szacunkową ilość obornika przeliczono na 1 ha użytków rolnych pod zasiewy czterech zbóż w poszczególnych latach. Nie jest to oczywiście szacunek dokładny, ale dla naszych obliczeń wystarczający. Przy ustalaniu poziomu nawożenia organicznego przyjęto zgodnie z dotychczasową praktyką w gospodarstwach chłopskich, że 50% zasobów obornika jest wykorzystywane przez cztery zboża.[3] Nawożenie obornikowe stanowi jedną z podstawowych determinant naszej funkcji produkcji. Jest to w naszym wypadku o tyle logiczne, że przy dotychczasowym poziomie nawożenia mineralnego zboża wymagają nawożenia organicznego.

Sposób opracowania wojewódzkiego bilansu nawozowego ilustruje tabela 1. Z zamieszczonych danych wynika, że wzrost nawożenia obornikowego i mineralnego jest liniowy. Warto zauważyć, że nawożenie organiczne słabiej wzrasta niż nawożenie mineralne. Wzrost nawożenia obornikowego w 1968 r. w stosunku do 1957 r. nastąpił o 33%, a nawożenie mineralne wzrosło prawie czterokrotnie. Wynika to z tego, że wzrost obornika jest ograniczony przyrostem zwierząt, który dokonuje się wolniej niż produkcja nawozów mineralnych.

Należy przy tym pamiętać, że obornik oprócz podstawowych składników dostarcza roślinom próchnicy i działanie jego nie jest zakończone w ciągu jednego roku. W niniejszej pracy nie uwzględniono następczego działania obornika, które nie powoduje — moim zdaniem — poważniejszych błędów.

Obecnie zajmiemy się krótko analizą efektywności nawożenia mineralnego i obornikowego w odniesieniu do plonów czterech zbóż. Jest to szczególnie ważne w obecnym czasie, kiedy zwiększenie produkcji zbóż stało się problemem wielkiej wagi. Okres 12-letni, który uwzględniliśmy w naszych badaniach jest dostatecznie duży i pozwala uchwycić ogólne tendencje w zakresie kształtowania się poziomu kultury rolnej.

Wydaje się, iż najłatwiej jest mierzyć efektywność nawożenia za pomocą plonów czterech zbóż w odniesieniu do całego nawożenia przeliczonego na 1 ha powierzchni 4 zbóż lub na 1 ha użytków rolnych.[4] Metoda ta pozwala na szybkie oszacowanie odpowiednich współzależności.

Przy pomocy rachunku korelacji i regresji obliczono efektywność nawożenia mineralnego i organicznego w latach 1957—1968 i przedstawiono w tabeli 2.

[3] Por: *ibid.*, s. 72.

[4] Podobne stanowisko zajmuje E. Kurek (*Próba oceny metod oraz mierników obliczania efektywności nawożenia mineralnego*, „Zagadnienia Ekonomiki Rolnej" 1969, nr 3, s. 42.

The way of calculating the fertilization balance in a province
The way of calculating the fertilization balance in a province

Lata	Bydło w tys. szt.	Trzoda chlewna w tys. szt.	Owce w tys. szt.	Konie w tys. szt.	Ogółem prod. obor. w tys. ton	50% zasobów obornika	Obszar upraw 4 zbóż w tys. ha	Nawozy mineralne $N+P_2O_5K_2O$ w kg/ha	Obornik w kg/ha
1957	734,7	1171,1	321,0	292,1	8 547,8	4273,9	821,9	24,1	52,0
1958	748,2	1261,7	328,2	307,1	8 844,1	4422,1	834,3	25,9	53,0
1959	751,3	1246,2	292,0	315,9	8 891,0	4445,5	827,2	31,9	53,7
1960	766,5	1284,9	278,8	312,4	9 031,2	4515,6	799,4	38,0	56,5
1961	791,5	1298,6	233,4	304,4	9 187,4	4593,7	784,9	40,6	58,5
1962	831,9	1389,5	227,2	298,6	9 567,1	4783,6	765,4	48,0	62,5
1963	892,5	1161,6	204,1	299,5	9 751,2	4875,6	736,4	48,2	66,2
1964	833,1	1225,8	185,3	291,9	9 339,5	4669,7	739,8	52,4	63,1
1965	815,7	1227,8	173,4	289,4	9 196,7	4598,3	741,8	59,8	62,0
1966	866,9	1397,6	177,6	294,6	9 813,4	4906,7	724,1	68,3	67,8
1967	913,6	1281,5	185,8	303,6	10 074,5	5037,2	723,9	74,1	69,6
1968	942,1	1283,5	191,6	312,0	10 337,2	5168,6	731,5	90,3	70,7

Źródło: Przeliczenia własne na podstawie danych GUS z *Roczników statystycznych* za lata 1957—1969.

Tab. 2. Efektywność nawożenia mineralnego i organicznego w latach 1957—1968
The effectiveness of mineral and manure fertilization in the years 1957—1968

Wyszczególnienie	Współczynnik korelacji prostej R	Współczynnik determinacji R^2	Współczynnik regresji B	Stała równania A
Plony 4 zbóż a nawożenie mineralne w NPK	0,87	0,76	0,084	12,43
Plony 4 zbóż, a nawożenie organiczne	0,79	0,62	0,21	6,12

Tab. 3. Kształtowanie się przeciętnych plonów 4 zbóż łącznie w zależności od zużycia obornika i nawozów mineralnych w województwie lubelskim w latach 1957—1968
The average 4 grain crops according to the use of manure and mineral fertilizers in the Lublin province during the years 1957—1968

Lata	Plony 4 zbóż w q/ha Y_t	Obornik w q/ha x_{1t}	Nawozy mineralne w kg/ha $(N+P_2O_5+K_2O)$ x_{2t}
1957	14,8	52,0	24,1
1958	14,7	53,0	25,9
1959	16,3	53,7	31,9
1960	14,8	56,5	38,0
1961	18,4	58,5	40,6
1962	13,2	62,5	48,0
1963	15,4	66,2	48,2
1964	14,2	63,1	52,4
1965	18,7	62,0	59,8
1966	18,1	67,8	68,3
1967	17,3	69,6	74,1
1968	20,6	70,7	90,3

Źródło: Obliczenia własne na podstawie danych GUS z *Roczników statystycznych* za lata 1957—1969.

Współczynniki korelacji pomiędzy plonami czterech zbóż, a nawożeniem mineralnym i obornikowym nie wnoszą do analizy wiele nowego. Wskazują jedynie na istnienie pełnych podstaw formalnych dla obliczenia regresji. Kierunek i relacja współczynników korelacji prostej i cząstkowej odpowiada współczynnikom regresji cząstkowej (względnie

elastyczności) dla danego układu współzależności. Proste współczynniki korelacji wskazują na silny związek pomiędzy plonami czterech zbóż a naowżeniem mineralnym (R=0,87) oraz plonami 4 zbóż a nawożeniem obornikowym (R=0,79).

III

Dla określenia dynamicznego modelu statystycznej funkcji produkcji rolniczej woj. lubelskiego posłużyć się można funkcją produkcji Cobb-Douglasa (3) o postaci:

$$Y_t = a_0 + a_1X_{1t} + a_2X_{2t} + a_3t + \xi_t \quad (5)$$

gdzie poszczególne symbole mają następujące oznaczenia:

Y — przeciętne plony czterech zbóż w q/ha w okresie t obliczone z funkcji produkcji (5),

X_{1t} — zużycie obornika w q/ha w okresie t,

X_{2t} — zużycie nawozów mineralnych w czystym składniku NPK w kg/ha w okresie t,

t — zmienna reprezentująca czas.

Z tabeli 3 wynika, że przeciętny wzrost plonów czterech zbóż w woj. lubelskim w latach 1957—1968 wykazuje znaczne wahania. Pomimo tej zmienności charakteryzują się one jednak względnie stałym wzrostem, który można wyrazić przy pomocy równania o następującej postaci:

$$Y'_t = 13{,}871 + 0{,}384t + \xi_t \quad (6)$$

gdzie t przyjmuje kolejne wartości liczb naturalnych od 1 do 12, przy czym $t=1$ w 1957 r. oraz $t=12$ w 1968 r.

Ponieważ plony czterech zbóż wykazywały w sąsiednich latach duże odchylenia, więc ustalono różnicę, jaka zachodzi między faktycznymi a teoretycznymi plonami według następującego wzoru:

$$S_y = \sqrt{\frac{\Sigma(Y_t - Y'_t)^2}{N}} \quad (7)$$

gdzie:

N — liczba obserwacji

Y'_t — plony teoretyczne 4 zbóż

Y_t — plony faktyczne 4 zbóż

W naszym wypadku średni błąd oszacowania wynosi 1,67 q/ha. Plony czterech zbóż w badanym czasookresie przedstawia wykres 1. Z wykresu wynika, że poza górną i dolną granicą tolerancji znajdują się plony w roku 1961, 1962, 1964 i 1968. Oznacza to, że na wielkość plonów w tych latach działały czynniki przypadkowe, które spowodowały duże



Wykres 1. Kształtowanie się tendencji rozwojowej plonów 4 zbóż w latach 1957—1968 w województwie lubelskim; 1 — szereg teoretyczny (Y_t); 2 — szereg empiryczny; 3 — górna granica tolerancji; 4 — dolna granica tolerancji
The progressive tendency in 4 grain crops in the years 1957—1968 in the Lublin province; 1 — theoretical sequence (Y_t); 2 — empirical sequence; 3 — the top boundary of toleration; 4 — the bottom boundary of toleration

wahania plonów czterech zbóż. Aby usunąć te wahania przypadkowe posłużono się średnią chronologiczną 4-letnią, która w sposób dokładny odzwierciedla tendencję rozwojową plonów czterech zbóż. Uwzględniając powyższe poprawki oszacowano za pomocą metody najmniejszych kwadratów parametry funkcji produkcji danej wzorem (4) i dla plonów czterech zbóż woj. lubelskiego otrzymano równanie o postaci:

$$Y_t = 26,1194 - 0,2843 X_{1t} + 0,1312 X_{2t} + 0,2155_t + \xi_t \tag{8}$$

Obecnie zbadamy różnicę, jaka zachodzi pomiędzy plonami faktycznymi a teoretycznymi, otrzymanymi w równaniu (8) przy pomocy odchylenia standardowego składnika losowego według wzoru:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2} \tag{9}$$

godzie:

n — liczba obserwacji

k — liczba szacowanych parametrów

ξ_t — reszty równania Y

W naszym przypadku wartość odchylenia standardowego dla funkcji produkcji określonej wzorem (8) wynosi S = 0,492 q/ha.

Dla zbadania, w jakim stopniu przyjęte zmienne objaśniające wpływają na poziom plonów czterech zbóż w badanym okresie czasu oraz

jaki margines pozostaje dla innych, nie uwzględnionych zmiennych, obliczono wskaźnik zależności według wzoru:

$$\varphi^2 = \frac{\Sigma\varepsilon_t^2}{\Sigma(Y_t - \bar{Y}_t)^2} \qquad (10)$$

gdzie:

ε_t — wartość zaobserwowanych reszt

Y_t — empiryczne wartości plonów 4 zbóż

$\bar{Y}_t$ — średnia wartość plonów czterech zbóż.

Wskaźnik zbieżności plonów czterech zbóż wynosi $\varphi^2 = 0{,}0588$. Oznacza to, że wariancja poziomu plonów 4 zbóż jest objaśniona przez model dany równaniem (8) w 94,1%. Z tego wynika, że wybrana przez nas postać funkcji liniowej bardzo dobrze odzwierciedla zależność pomiędzy wielkością otrzymaną z funkcji produkcji a każdym z przyjętych czynników określających ją.[5]

Mały błąd rzędu 5,9%, jaki popełniliśmy przy wyborze modelu liniowej funkcji produkcji, wyklucza przypuszczenie, że funkcja potęgowa dana wzorem (3) opisuje dokładniej kształtowanie się przeciętnych plonów 4 zbóż niż wyżej opisana funkcja liniowa.[6]

Możemy więc przyjąć, że liniowa funkcja produkcji jest modelem najlepiej opisującym poziom plonów czterech zbóż woj. lubelskiego w latach 1957—1968, co zapisujemy:

$$Y_t = 26{,}1194 - 0{,}2843X_{1t} + 0{,}1312\,X_{2t} + 0{,}2155t + \xi_t \qquad (11)$$

Z równania (11) wynika, że przyrost nawozów mineralnych w czystym składniku NPK o 1 kg powoduje średnio wzrost przeciętnych plonów czterech zbóż o około 13 kg/ha. Stosunkowo duża wielkość zmiennej t reprezentującej czas równy 0,2155 określa między innymi szybko dokonujący się postęp techniczno-ekonomiczny w rolnictwie oraz wyraża wzrost poziomu kultury rolnej w badanych latach 1957—1968.

Niezbyt wysoka wielkość parametru $a_2 = 0{,}1312$ wynika częściowo z tego, że w warunkach rolnictwa lubelskiego nie został przekroczony próg dotyczący nawożenia mineralnego.

Niezależnie od tego obserwujemy ujemną reakcję plonów na wzrost poziomu nawożenia obornikowego. Ujemna wartość tego współczynnika pozwala nam przypuszczać, że nawożenie organiczne nie jest najważniejsze w podnoszeniu plonów czterech zbóż, a wynika z następujących powodów: a) komplementarności nawozów organicznych i mineralnych; b) różnej siły nawozowej obornika w sensie zawartych w nim skład-

[5] Por. Zeliaś: *op. cit.*, s. 81.

[6] *Loc. cit.*

ników pokarmowych wynikłych ze złego przechowywania obornika lub niewłaściwej ściółki; c) małego przyrostu nawożenia obornikowego w badanym okresie; d) małej liczby obserwacji.[7]

W rzeczywistości każdy z badanych czynników nie może dać ujemnego przyrostu plonów pod warunkiem, że jest stosowany racjonalnie, terminowo i w odpowiednich proporcjach z innymi czynnikami według zaleceń agrotechnicznych.

Cechą charakterystyczną nawozów organicznych jest to, że ich właściwości pokarmowe nie wyczerpują się w ciągu jednego roku. Okres, w którym obornik dostarcza roślinom pokarmów, trwa nawet kilka lat. Jeśli to uwzględnimy przy obliczaniu funkcji produkcji, na pewno zniknie ujemna wartość dotycząca nawożenia organicznego. Jest to charakterystyczne dla plonów czterech zbóż, ponieważ zboża są wysiewane zwłaszcza po okopowych, które wymagają intensywnego nawożenia obornikowego, więc następcze działanie obornika jest duże.

Z kolei obliczymy macierz wariancji i kowariancji estymatorów parametrów równania (4) korzystając z wzoru:

$$D^2(a_i) = \delta^2 \cdot \gamma_{ii} \quad (i = 1,2,\ldots,k) \qquad (12)$$

gdzie δ^2 jest wariancją składnika losowego ξ_t, γ_{ii} są elementami diagonalnymi macierzy $\Gamma = C^{-1}$, odwrotnej do macierzy C o elementach c_{ij}.

Ponieważ $\varphi^2 \neq 0$, będą to przybliżone wartości średnich błędów szacunku. Elementy znajdujące się na głównej przekątnej tej macierzy są równe wariancjom estymatorów poszczególnych parametrów a_0, a_1, a_2, a_3, a pozostałe elementy są kowariancjami estymatorów, to znaczy są parametrami określającymi stopień skorelowania dwóch estymatorów. Warto zwrócić uwagę, że elementy c_{ij} macierzy C są już znane. Pełnią one rolę współczynników w układzie równań normalnych. Przez rozwiązanie tego układu otrzymano wartości ocen parametrów a_0, a_1, a_2, a_3.

Macierz wariancji i kowariancji estymatorów jest w naszym przypadku równa:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 67{,}957438 & -1{,}329123 & -0{,}080055 & 2{,}709928 \\ -1{,}329123 & 0{,}026563 & 0{,}000136 & -0{,}047078 \\ -0{,}080055 & 0{,}000136 & 0{,}005001 & -0{,}027538 \\ 2{,}709928 & -0{,}047078 & -0{,}027538 & 0{,}239464 \end{bmatrix} \qquad (13)$$

Obliczona według wzoru (9) ocena parametru δ^2 jest równa 0,2424. Podstawiając tę ocenę do wzoru (12) w miejsce δ^2 otrzymamy nastę-

[7] *Ibid.*, s. 83.

pujące przybliżone wielkości średnich błędów poszczególnych parametrów równania (11), co przedstawiono w postaci tabeli 4.

Tab. 4. Oszacowanie błędów parametrów liniowej funkcji produkcji
The valuation of mistakes in parametres of the linear function of production

Estymator	Wartość estymatora	Błąd średni estymatora	Błąd średni w % oceny parametru
a_0	26,1194	16,472883	63,0
a_1	—0,2843	0,006439	2,26
a_2	0,1312	0,001212	0,92
a_3	0,2155	0,058046	26,9

Przytoczone wyżej błędy szacunku estymatorów informują nas o ile przeciętnie będziemy się mylili *in plus* lub *in minus* szacując te same parametry modelu funkcji produkcji (4) na podstawie różnych zbiorów obserwacji statystycznych, ale składających się zawsze z tej samej liczby obserwacji. W ten sposób średnie błędy szacunku parametrów (estymatorów) a_0, a_1, a_2, a_3 umożliwią nam wydanie sądu, czy otrzymane oceny parametrów można uważać za wystarczająco dokładne do celów praktycznych czy nie.

Dla zbadania istotności wpływu wyróżnionych funkcji (4) zmiennych na poziom produkcji postawiono hipotezę $H_0 : a_i = 0$ przy alternatywie $H_0 : a_i \neq 0$. Sprawdzianem hipotezy H_0 jest wyrażenie:

$$t = \frac{a_i - \bar{a}_i}{D(a_i)} \tag{14}$$

przy czym poszczególne symbole mają następujące znaczenia:

a_i — ocena parametru a otrzymana za pomocą metody najmniejszych kwadratów,

Da_i — średni błąd szacunku parametru a

Jeśli hipoteza H_0 jest prawdziwa (słuszna), to $a_i = 0$. Ostatecznie mamy:

$$t = \frac{\bar{a}_i}{D(a_i)} \tag{15}$$

Jeśli hipoteza H_0 jest prawdziwa, wtedy sprawdzian t ma rozkład Studenta o $n—k$ stopniach swobody, gdzie n — liczba obserwacji, na podstawie której przeprowadzono estymacje, k — liczba szacowanych parametrów.

Dla obszaru krytycznego należą wszystkie wartości sprawdzianu większe od liczby t takie, że:

$$P|(t) > t\alpha| = a = 0,10 \qquad (16)$$

W naszym przykładzie wartości sprawdzianu są równe odpowiednio przy wartości $t=1,943$ wziętą z tablic rozkładu t Studenta dla ilości stopni swobody $r=n-k=12-4=8$ przedstawia tabela 5. Z wartości tych wynika, że nie możemy przyjąć hipotezy, że współczynnik a_0 jest równy 0. Prawdopodobieństwo związane z tą wartością jest mniejsze niż 0,10 i dlatego uważamy zerowe wartości współczynników za mało prawdopodobne. Oceniamy, że współczynniki dla nawożenia mineralnego, obornikowego i zmiennej reprezentującej czas nie są statystycznie istotne. Wartości sprawdzianu odpowiadające tym współczynnikom znalazły się w obszarze przyjęcia, więc nie ma podstawy do odrzucenia sprawdzanej hipotezy H_0. Nie oznacza to, że możemy bez zastrzeżeń przyjąć hipotezę H_0.

Wartość kwadratu współczynnika zbieżności wynosi dla modelu liniowej funkcji produkcji (8) 0,0588, a więc współczynnik korelacji wielorakiej jest równy:

$$\rho = \sqrt{1-\varphi^2} = 0,9412 = 0,97 \qquad (17)$$

Tab. 5. Sprawdzian testu Studenta
The criterion of Student's test

Parametr a_i	Ocena parametru $\bar{a}_i$	Wariancja estymatora $D^2(a_i)$	Średni błąd szacunku $D(a_i)$	Wartość stosunku $t = \frac{\bar{a}_i}{D(a_i)}$
a_3	0.2155	0,239406	0,4893	0,4404
a_2	0,1312	0,005001	0,0707	1,8557
a_1	-0,2843	0,026563	0,1630	-1,7441
a_0	26,1194	67,957438	8,2436	3,1684

IV

Rozważania teoretyczne i empiryczne przeprowadzone w niniejszej pracy pozwalają na sformułowanie pewnych uwag i wniosków:

1) zaprezentowane wyniki potwierdzają tezę, że przy pomocy dynamicznego modelu Cobb-Douglasa można w sposób dostatecznie ścisły

ustalić zależność między poziomem plonów czterech zbóż, a czynnikami kształtującymi je;

2) proponowany liniowy model dynamicznej funkcji produkcji nadaje się do opisania kształtowania się przeciętnych plonów 4 zbóż;

3) porównanie uzyskanych przy pomocy funkcji produkcji wartości teoretycznych z danymi empirycznymi pozwala nam przypuszczać, że model takiej funkcji może służyć do analizy ekonomicznej.[8]

Przedstawiony model funkcji byłby bardziej precyzyjny, jeśliby nawożenie mineralne rozbić na trzy podstawowe grupy (nawozy azotowe, potasowe i fosforowe) lub rozdysponować pod uprawę żyta, pszenicy i owsa oddzielnie, lecz wymaga wielu badań i doświadczeń.

Model dynamiczny liniowej funkcji produkcji dał dobrą zgodność wyników obliczonych z rzeczywistymi — na co wskazują niskie wartości oszacowań współczynnika zbieżności, wariancji składnika losowego oraz średnich błędów szacunku parametrów — i byłby o wiele lepszy, gdyby do obliczenia poziomu czterech zbóż wzięto więcej czynników kształtujących je.

BIBLIOGRAFIA

1. H. Chołaj, A. Cybura, A. Woś: *Zastosowanie funkcji produkcji do wpływu cen pasz na produkcję trzody chlewnej*, „Ekonomista" 1964, nr 6.
2. E. Kurek: *Próba oceny metod oraz mierników obliczania efektywności nawożenia mineralnego* „Zagadnienia Ekonomiki Rolnej" 1969, nr 3, s. 41—56.
3. I. W. Linniak: *Metoda najmniejszych kwadratów i teoria opracowania obserwacji*, PWN, Warszawa 1962.
4. W. Pieriegubow: *Metoda najmniejszych kwadratów i jej zastosowanie*, PWE, Warszawa 1967.
5. Z. Kozłowski, F. Tomczak: *Zarys ekonomiki produkcji roślinnej intensyfikacji rolnictwa*, PWRiL, Warszawa 1961.
6. Z. Pawłowski: *Modele ekonometryczne równań opisowych*, PWN, Warszawa 1963.
7. S. Wacławowicz: *Metodyka określenia stanu i kierunku rozwoju produkcji podstawowych zbóż na przykładzie województwa krakowskiego*, PWN, Kraków 1960.
8. A. Zeliaś: *Zastosowanie dynamicznego modelu statystycznej funkcji produkcji w planowaniu wysokości plonów*, „Przegląd Statystyczny" 1968, t. 15, s. 75—87.

РЕЗЮМЕ

В статье рассматривается динамическая модель статистической функции производства, которая применяется в планировании урожаев

[8] *Ibid.*, s. 86.

в сельском хозяйстве. На основе эмпирических данных составлена теоретическая, стохастическая модель линейной функции производства Кобб-Дугласа:

$$Y_t = a_o + a_1 X_{1t} + a_2 X_{2t} + a_3 t + \xi_t$$

Эта модель может быть использована в прогнозировании урожайности в будущем. Она дает также возможность установить зависимость между уровнем урожая и формирующими его факторами.

Для установления функции производства приняты следующие факторы, формирующие размеры урожая: применение минеральных и навозных удобрений, а также время (показатель уровня сельскохозяйственной культуры). Не учитываются такие факторы, как качество почвы, подбор сортов, обработка почвы, климатические условия, мелиорация и др., так как они трудно квантируются. Кроме того, эти факторы трудно представить в измеряемом виде.

SUMMARY

The study discusses the dynamic model of statistical function of production having a use in the planning of crops in agricultural farms. On the ground of empirical data, the author constructs a theoretical, stochastic model of the linear function of production, according to Cobb--Douglas, in the following form:

$$Y_t = a_o + a_1 X_{1t} + a_2 X_{2t} + a_3 t + \xi_t$$

This model can be used in prognosing the size of crops in the future years. It also allows to determine the dependence between the level of crops and formative factors.

In determining the function of production the following factors which decide the size of crops were accepted: mineral fertilization, manure and the time of fertilization, as the measures of the standard of agriculture. Not taken into consideration was the class of soil, selection of sub-species, climate conditions, drainage and others, because of the difficulties in quantifying and presenting them in a measurable form.